MATEMATICA - LEZIONE 26

lunedì 20 novembre 2023 08:40

1) Derivate delle potenze e fattoriale di un numero intero

$$f(x) = x^n \quad \text{con } n \in \mathbb{N}.$$

$$f'(x) = n\, x^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)\, x^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)\, x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1 \quad (\text{FATTORIALE DI } n)$$

Def: Sia $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Definiamo FATTORIALE di n il prodotto di tutti i numeri naturali tra 1 ed n.
Si indica con $n! = n(n-1)\cdot \ldots \cdot 2\cdot 1$.
Si definisce anche $0! = 1$.

ESEMPI

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 2\cdot 1 = 2$

$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 6$

$4! = 4\cdot \underbrace{3\cdot 2\cdot 1}_{3!} = 4\cdot 6 = 24$

$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 24 = 120$

$6! = 6\cdot 120 = 720.$

OSS:

1) $\forall n \in \mathbb{N}: \ (n+1)! = (n+1)\cdot n!$

2) Se $f(x) = x^n$, $f^{(n)}(x) = n! \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

(Convenzione: $f^{(0)}(x) = f(x) = x^0 = 1$)

3) Se $f(x) = x^m$ e $k \in \mathbb{N}$:

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > m \\ m(m-1)\cdot \ldots \cdot (m-k+1)\, x^{m-k} = \dfrac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} & \text{se } 0 \le k \le m. \end{cases}$$

Simboli di Landau (o piccolo).

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $a < b$. Sia $x_0 \in [a, b]$. Si scrive che $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ se $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

ESEMPI

1) Per $x \to 0$: $\quad x^2 = o(x)$ perché:

$$\frac{x^2}{x} = x \xrightarrow{x \to 0} 0 \quad \text{cioè} \quad \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0.$$

Più in generale se $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Assumiamo $n < m$. Confrontiamo x^n e x^m per $x \to 0$. Si ha che $x^m = o(x^n)$ perché $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \to 0} x^{m-n} = 0$. $\quad m-n > 0$

2) Se $x \to +\infty$, $\quad x = o(x^2)$ perché:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Più in generale, se $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e $n < m$, allora $x^n = o(x^m)$ per $x \to +\infty$.

3) $f(x) = o(1)$ vuol dire che $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = 0$.

Più in generale

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \iff \underset{\text{per } x \to x_0}{f(x) - \ell = o(1)} \iff \underset{\text{per } x \to x_0.}{f(x) = \ell + o(1)}$$

4) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \iff \frac{e^x-1}{x} = 1 + o(1)$

$\iff e^x - 1 = x + x\,o(x)$

$\iff e^x - 1 = x + o(x).$

$\iff e^x = 1 + x + o(x).$ per $x \to 0.$

5) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \iff \frac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$ per $x \to 0$

$\iff \sin x = x + o(x)$ per $x \to 0.$

6) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \iff \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1)$ per $x \to 0$

$\iff 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ per $x \to 0$

$\iff \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 \underbrace{- o(x^2)}_{o(x^2)}$ per $x \to 0$

OSSERVAZIONI SUI SIMBOLI DI LANDAU

- Se $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $c\, o(f(x)) = o(c\, f(x))$

  perché $\frac{c\, o(f(x))}{c\, f(x)} = \frac{o(f(x))}{f(x)} \xrightarrow{x \to x_0} 0.$

- $-o(f(x)) = o(f(x))$ per $x \to x_0.$
- $g(x)\, o(f(x)) = o(f(x)\, g(x))$ se $g(x) \neq 0$ in $(a,b) \setminus \{x_0\}.$
- $o(f(x))\, o(g(x)) = o(f(x)\, g(x))$
- $o(f(x)) + o(f(x)) = o(f(x))$
- $o(o(f(x))) = o(f(x)).$

Simboli di sommatoria e produttoria

Sia $f: \mathbb{Z} \cap [m_1, m_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$. Definiamo

$$\sum_{k=m_1}^{m_2} f(k) = f(m_1) + f(m_1+1) + f(m_1+2) + \dots + f(m_2).$$

e

$$\prod_{k=m_1}^{m_2} f(k) = f(m_1) \cdot f(m_1+1) \cdot \dots \cdot f(m_2).$$

ESEMPI

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$\sum_{k=-1}^{2} k^2 = (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2 = 4$$

$$\sum_{k=1}^{3} e^k = e + e^2 + e^3$$

$$\sum_{k=1}^{n} e^k = e + e^2 + e^3 + \dots + e^n.$$

$$m! = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{m} k.$$

Polinomi di Taylor

Def: Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$ con $a < b$. Sia $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$. Siano $m \in \mathbb{N}$ e $x_0 \in (a, b)$. Assumiamo che f sia m volte derivabile in x_0. Definiamo POLINOMIO DI TAYLOR DI f DI CENTRO x_0 E ORDINE m, il polinomio:

$$T_m(x) := f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m$$

OSS 1

$\forall\, k \in \mathbb{N},\ 0 \le k \le n: \quad f^{(k)}(x_0) = T_n^{(k)}(x_0).$

(cioè T_n ha le stesse derivate di f in x_0 fino all'ordine n)

OSS 2 Utilizzando i simboli di sommatoria:

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \quad \left(\text{con la convenzione } f^{(0)}(x) = f(x)\right)$$

TEOREMA DI PEANO (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Siano $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $f: (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$.
Se f è derivabile n volte in $x_0 \in (a, b)$, allora

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Cioè $f(x) = T_n(x) + o((x-x_0)^n)$.

Inoltre T_n è l'unico polinomio di grado $\le n$ che soddisfa questa proprietà.

ESEMPI.

$f(x) = e^x$ e $x_0 = 0$

$f'(x) = e^x$

$f''(x) = e^x$

$f'''(x) = e$

$\vdots$

$f^{(k)}(x) = e^x$

$f(0) = e^0 = 1$

$f'(0) = e^0 = 1$

$f''(0) = 1$

$\vdots$

$f^{(k)}(0) = 1$

Il polinomio di Taylor di centro 0 è:

$$T_m(x) = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} x^n$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{m!}x^m.$$

$$T_1(x) = 1 + x$$

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$T_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

(Polinomi di Taylor di e^x di centro $x_0 = 0$)

Per $x \to 0$:

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

(Formule / sviluppi di Taylor di e^x per $x \to 0$)

Applicazioni al calcolo di limiti

Calcoliamo: $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ f.i.: $\frac{0}{0}$

Approssimiamo e^x con il suo polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine 2 usando la formula di Taylor: $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$.

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{(\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)) \cancel{-1} \cancel{-x}}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0 \text{ per } x \to 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} + \frac{o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Abbiamo usato T_2. Se avessimo usato T_1:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + o(x) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2} = \frac{o(x)}{x^2} = \underbrace{\frac{o(x)}{x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to \pm\infty}$$

Con T_1 non riusciamo a calcolare il limite.

Con T_3 si poteva calcolare:

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - \cancel{1} - \cancel{x}}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x + \frac{o(x^3)}{x^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{6}x}_{\to 0 \text{ per } x \to 0} + \underbrace{x}_{\to 0} \underbrace{\frac{o(x^3)}{x^3}}_{\to 0} \xrightarrow{x \to 0} \frac{1}{2}.$$

Attenzione: T_n dipende anche da x_0. Su molti libri T_n è indicato con $T_{n, x_0}(x)$ o $P_{f, n, x_0}(x)$.

ESEMPIO

- $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(2) = e^2$$

$$T_n(x) = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2}(x-2)^2 + \cdots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n.$$

Quando $x_0 = 0$, i polinomi di Taylor sono detti anche POLINOMI DI MCLAURIN.

ESEMPIO

$f(x) = \sin x$ e $x_0 = 0$.

$f(x) = \sin x$ $\quad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x$ $\quad f'(0) = \cos 0 = 1$

$f''(x) = -\sin x$ $\quad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$ $\quad f'''(0) = -1$

$f''''(x) = \sin x$ $\quad f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = \cos x$ $\quad f^{(5)}(0) = 1$

$\vdots$

$$T_n(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3 + 0 + \frac{1}{5!}x^5 + 0 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$T_0(x) = 0$ $\quad \sin x = 0 + o(1)$

$T_1(x) = x$ $\quad \sin x = x + o(x)$

$T_2(x) = x$ $\quad \sin x = x + o(x^2)$

$T_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$T_4(x) = x - \frac{x^3}{6}$ $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$T_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$.

$$T_{2n+1}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

ESEMPIO

$f(x) = \cos x \quad , x_0 = 0$

$f(x) = \cos x$ $\quad f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$ $\quad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$ $\quad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$ $\quad f'''(0) = 0$

$f^{(4)}(x) = \cos x$ $\quad f^{(4)}(0) = 1$

$\vdots$

$$T_n(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

Tabella degli sviluppi di Taylor delle funzioni elementari in $x_0 = 0$.

- $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underbrace{o(x^{2n+1})}$

qui si può scrivere anche $o(x^{2n+2})$

- $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + \dots + (-1)^{2n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underbrace{o(x^{2n})}$

oppure $o(x^{2n+1})$

- $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^n + o(x^n)$.
- $\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$

dove $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot \dots (\alpha-n+1)}{n!}$

ESEMPIO

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}}$, $x_0 = 0$.

- lo sviluppo di ordine 2 è:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)$$

- lo sviluppo di ordine 3 è:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \underbrace{\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{6}}_{\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{3}\right)}{6} = \frac{5}{81}}x^3 + o(x^3)$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 + o(x^3).$$